第20講　数列(1)

1 [1]　初項 $a_1=1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 $b_1=2$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の項のうち，値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{q_n\}$ の一般項，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

[2]　公比が正の数である等比数列について，初めの3項の和が21であり，次の6項の和が1512であるという．この数列の初めの5項の和を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　等差数列と等差数列の共通項

2つの等差数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の共通項は「　　　数列」をなす．

その公差は，$\{a_n\}$ の公差と $\{b_n\}$ の公差の「　　　　　　」である．

[2]　$1-r^n$ について

$r=1$ のとき $1-r^n=0$　　よって $1-r^n$ は $1-r$ を「　　　　　　」

$1-r^2=(1-r)(1+r)$　　　　$1-r^3=(1-r)(1+r+r^2)$

$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})$

n が偶数のとき，$n=2m$ とすると

$1-r^{2m}=1^2-(r^m)^2=$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　数列 7, 67, 667, 6667, …… の第 n 項を求めよ.

[2]　$a_n=n(n-1)+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ.

[3]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$ を n の式で表せ.

【Point Pickup】

[1]　和の形で表されている数列

→ 一般項を出すために和を計算する. どのような数列かを見抜く必要がある.

考え方は「　　　　　　」を用いた和と同様.

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を b_n とすると 「　　　　」のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

[2]　和の記号 Σ の「公式」

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=$　　　　　　　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=$

[3]　部分分数分解

$$\frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)}=\frac{1}{}\left(\frac{1}{n+\alpha}-\frac{1}{n+\beta}\right)$$

$\alpha<\beta$ の形で分解に入るとよい.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(2n+1)$ となるとき，次の問に答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 2 の等比数列とし，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_nb_n$ とする．数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ．

【Point Pickup】

和から一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n-S_{n-1}=a_n$　($n\geqq 2$ のとき)，　　$S_1=a_1$

ずらし法

一般項が 「(　　　)×(　　　)」 の形となっているときの和は，和を列挙し，

それに「　　　」をかけたものを別に用意し，2 式の差をとるとよい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　数列(1)

［1］　初項 1，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 2，公差 7 の等差数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=$ アイ $n-$ ウエ である．

［2］　数列 1，11，111，1111，11111，…… の第 n 項は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}^{n}-1}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

［3］　$a_n=n^2+3n+2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n}{\boxed{\text{ク}}(n+\boxed{\text{ケ}})}$ である．

［4］　$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+6\cdot3^5$ とおくと，$S=$ コサシス である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　数列(1)

1 ［1］　初項 $a_1=1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 $b_1=2$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の項のうち，値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{q_n\}$ の一般項，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(1)　$\{a_n\}$：$1,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3},\ 3,\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{13}{3},\ 5,\ \dfrac{17}{3},\ \cdots\cdots$

数列 $\{a_n\}$ から整数を抜き出し小さい順に並べたものは　1，3，5，……

これは初項 1，公差 2 の等差数列である．よって求める数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{p_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1}$$

(2)　$\{b_n\}$：$2,\ \dfrac{7}{2},\ 5,\ \dfrac{13}{2},\ 8,\ \cdots\cdots$

よって数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の共通項からなる数列 $\{q_n\}$ の初項は 5

また，数列 $\{q_n\}$ の公差は，数列 $\{a_n\}$ の公差 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}$ と数列 $\{b_n\}$ の公差 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{6}$ の最小公倍数 $\dfrac{36}{6}=6$ である．

よって求める数列 $\{q_n\}$ の一般項は　$\boldsymbol{q_n}=5+(n-1)\cdot 6=\boldsymbol{6n-1}$

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{n(q_1+q_n)}{2}=\frac{n\{5+(6n-1)\}}{2}=\frac{n(6n+4)}{2}=\boldsymbol{n(3n+2)}$$

1 ［2］　公比が正の数である等比数列について，初めの 3 項の和が 21 であり，次の 6 項の和が 1512 であるという．この数列の初めの 5 項の和を求めよ．

題意の等比数列の初項を a，公比を r（$r>0$）とすると，

$$a_1+a_2+a_3=\frac{a(1-r^3)}{1-r}=21 \quad \cdots\cdots①$$

$$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=\frac{a_4(1-r^6)}{1-r}=\frac{ar^3(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=1512 \quad \cdots\cdots②$$

①を②に代入して　$21r^3(1+r^3)=1512$

$r^3=t$ とおくと　$t(1+t)=72$　　$t^2+t-72=(t+9)(t-8)=0$　　$t=-9,\ 8$

つまり　$r^3=-9,\ 8$　　$r>0$ より　$r=2$　　このとき①より　$\dfrac{a(1-8)}{1-2}=21$　　$a=3$

よって求める和は　$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\dfrac{3(2^5-1)}{2-1}=\boldsymbol{93}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　数列 7，67，667，6667，…… の第 n 項を求めよ.

$n \geqq 2$ のとき，第 n 項は

$$7+60+600+6000+\cdots\cdots+6\cdot 10^{n-1}$$
$$=7+\frac{60\cdot(10^{n-1}-1)}{10-1}$$
$$=7+\frac{20(10^{n-1}-1)}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\cdot 10^{n}+1}{3}}$$

（$n=1$ のときも成立）

2 [2]　$a_n=n(n-1)+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$a_n=n(n-1)+1=n^2-n+1$ より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)+6\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2+4)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+2)}$$

2 [3]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$ を n の式で表せ.

$\dfrac{1}{k^2+k}=\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(2n+1)$ となるとき，次の問に答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 2 の等比数列とし，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_nb_n$ とする．数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ．

(1)　$S_n=n(2n+1)=2n^2+n$　……①　より，$a_1=S_1=3$

$n\geqq 2$ のとき　$S_{n-1}=2(n-1)^2+(n-1)=2n^2-3n+1$　……②

①－②より　$S_n-S_{n-1}=4n-1$　　つまり　$\boldsymbol{a_n=4n-1}$（$n=1$ のときも成り立つ）

(2)　$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ より　$c_n=a_nb_n=(4n-1)\cdot 2^{n-1}$

$T_n=3\cdot 1+7\cdot 2+11\cdot 2^2+\cdots\cdots+(4n-1)\cdot 2^{n-1}$　……③

$2T_n=3\cdot 2+7\cdot 2^2+11\cdot 2^3+\cdots\cdots+(4n-1)\cdot 2^n$　……④

③－④より

$$\begin{aligned}-T_n&=3+(4\cdot 2+4\cdot 2^2+\cdots\cdots+4\cdot 2^{n-1})-(4n-1)\cdot 2^n\\&=3+\frac{8(2^{n-1}-1)}{2-1}-(4n-1)\cdot 2^n\\&=3+4\cdot 2^n-8-(4n-1)\cdot 2^n\\&=-5+(-4n+5)\cdot 2^n\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{T_n=(4n-5)\cdot 2^n+5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　数列(1)

［1］　初項1，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項2，公差7の等差数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=$ **アイ** $n-$ **ウエ** である．

［2］　数列1，11，111，1111，11111，…… の第 n 項は $\dfrac{\boxed{オカ}^n-1}{\boxed{キ}}$ である．

［3］　$a_n=n^2+3n+2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n}{\boxed{ク}(n+\boxed{ケ})}$ である．

［4］　$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+6\cdot3^5$ とおくと，$S=$ **コサシス** である．

解答例

［1］　$\{a_n\}$：1，5，9，13，17，……

$\{b_n\}$：2，9，16，23，30，……

よって数列 $\{c_n\}$ は初項は9，公差28の等差数列より

$c_n=9+(n-1)\cdot28=\mathbf{28n-19}$

［2］　第 n 項は　$1+10+100+1000+\cdots\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1\cdot(10^n-1)}{10-1}=\mathbf{\dfrac{10^n-1}{9}}$

［3］　$a_n=(n+1)(n+2)$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\mathbf{\frac{n}{2(n+2)}}$$

［4］　$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+6\cdot3^5$　……①　より

$3S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+4\cdot3^4+5\cdot3^5+6\cdot3^6$　……②

①－②より

$-2S=1\cdot1+(1\cdot3+1\cdot3^2+1\cdot3^3+1\cdot3^4+1\cdot3^5)-6\cdot3^6$

$=1+\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}-6\cdot3^6=1+363-4374$

$=-4010$

よって　$S=\mathbf{2005}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。